第 37 講　数列(4)

【基礎確認事項】

［１］　漸化式

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$ で定義される数列を考えよう．

$a_2=3a_1+1=3\cdot1+1=4$

$a_3=3a_2+1=3\cdot4+1=13$

$a_4=3a_3+1=3\cdot13+1=40$

これを繰り返すと，この数列のすべての項が順に定義される．

□このように数列 $\{a_n\}$ のはじめの項，またははじめのいくつかの項と，これらをもとにして順に次の値を定めるための規則を与えると，この数列のすべての項を順に定義することができる．これを**帰納的定義**という．

□上の例においては $a_{n+1}=3a_n+1$ によって規則が定められる．このように，前の項から次の項を順次定める関係式を**漸化式**という．

公差 d の等差数列は，$a_{n+1}=a_n+d$　の形の漸化式

公比 r の等比数列は，$a_{n+1}=ra_n$　の形の漸化式

で表される．

⇒　C&U ①②

［２］　漸化式の基本的な形

□$a_{n+1}=a_n+f(n)$（n の式）の形の漸化式は，数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $f(n)$ である．よって $f(n)$ の和を求めることができれば，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる．

□$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式は，$\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を考えることにより，辺々引いて $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形することができる．すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列となり，$\{a_n-\alpha\}$ の一般項がわかる．これにより数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる．漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ に対して，$\alpha=p\alpha+q$ を**特性方程式**という．

上記のように，与えられた漸化式の形により，適切な変形をすることで一般項を求めることができるものがあり，多くの問題で典型的な漸化式の形とその解法を身につける必要がある．その一方で，漸化式は一般項を求めるためだけに存在する式ではなく，帰納的に項を順次出すことのできる式であることを忘れてはならない．

⇒　C&U ③

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$　で定められる数列 $\{a_n\}$ において，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

2　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2$　　(2)　$a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n$

3　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n+1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第37講　数列(4)

1　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=6$

(2)　$a_1=2,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$

(4)　$a_1=-2,\ 4a_{n+1}=5a_n+4$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1,\ na_{n+1}=2(n+1)a_n$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める．

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α，β の組を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　数列(4)

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=n+1$　のとき　$a_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(n^2+n+\boxed{\text{イ}})$　である．

(2)　$a_1=2$，$2a_{n+1}=a_n+1$　のとき $a_n=\left(\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^{n-1}+\boxed{\text{エ}}$　である．

(3)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+4}$　のとき　$a_n=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{n-1}-\boxed{\text{ク}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　数列(4)

【CHECK & UP】

1　$a_2=2a_1+3=2\cdot1+3=\mathbf{5}$　　$a_3=2a_2+3=2\cdot5+3=\mathbf{13}$

$a_4=2a_3+3=2\cdot13+3=\mathbf{29}$　　$a_5=2a_4+3=2\cdot29+3=\mathbf{61}$

> 漸化式により，前までの項を利用して「帰納的に」各項が順次求まっていくことがわかるであろう．

2　(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 2 の等差数列

よって　$a_n=1+(n-1)\cdot2=\mathbf{2n-1}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列

よって　$a_n=4\cdot2^{n-1}=\mathbf{2^{n+1}}$

> (1)(2)ともに a_{n+1} と a_n，つまり「隣接 2 項」に関する漸化式．(1)は a_n に 2 を加えると a_{n+1} になる．どの隣接 2 項でもその関係は変わらず継続される．よって(1)は「等差数列」を表す．(2)も同様に a_n に 2 を掛けると a_{n+1}，すなわち「等比数列」を表す．

3　$a_{n+1}=3a_n+1$　……①

$\alpha=3\alpha+1$　……②

②より　$\alpha=-\dfrac{1}{2}$

①－②より　$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$　つまり

①は　$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$と変形できる．

> 「特性方程式」を用いた漸化式の解法．漸化式が $a_{n+1}=pa_n+q$ の形をしている時に効果的である．
> ちなみに答案における 2 行目から 4 行目は不要である．①が 5 行目のように変形できることは「事実」であり，それ以上でもそれ以下でもない．この変形により，α だけ「ずれた」数列 $\{a_n-\alpha\}$ が「等比数列」を表していることがわかる．
> 　また，この形の漸化式は他にも「ずらして引く」「予想して数学的帰納法（後述）で示す」などの解法がある．誘導がついていたら乗れるようにしておくとよい．

よって　数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$，公比 3 の等比数列である．

したがって　$a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}\cdot3^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=\mathbf{\dfrac{11}{2}\cdot3^{n-1}-\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　数列(4)

1　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=6$　　(2)　$a_1=2,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$　　(4)　$a_1=-2,\ 4a_{n+1}=5a_n+4$

(1)　$a_{n+1}=a_n+6$　より　数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 6 の等差数列

よって　$a_n=1+(n-1)\cdot 6=\mathbf{6n-5}$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n$　より数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 −2 の等比数列

よって　$a_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)\cdot(-2)^{n-1}=\mathbf{-(-2)^n}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=2^n-3n+1$ である．

よって $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-3k+1)=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$$

$$=2^n-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-2$$　これは $n=1$ のときも成立する．

ゆえに　$a_n=\mathbf{2^n-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-2}$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n+1$　より　$a_{n+1}+4=\dfrac{5}{4}(a_n+4)$

よって数列 $\{a_n+4\}$ は初項 $a_1+4=2$，公比 $\dfrac{5}{4}$ の等比数列である．

したがって　$a_n+4=2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=\mathbf{2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}-4}$

2　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1,\ na_{n+1}=2(n+1)a_n$

(1)　a_1 および漸化式の形より，帰納的にすべての自然数 n で $a_n>0$ である．

与えられた漸化式において，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+4$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4,\ b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$

$b_{n+1}+2=3(n_n+2),\ b_1+2=\dfrac{5}{2}$　より　数列 $\{b_n+2\}$ は初項 $\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列.

よって　$b_n+2=\dfrac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$　より　$b_n=\dfrac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-2=\dfrac{5\cdot 3^{n-1}-4}{2}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\mathbf{\dfrac{2}{5\cdot 3^{n-1}-4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$na_{n+1}=2(n+1)a_n$　より　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{a_n}{n}$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n$　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$

よって　$b_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$　より　$\dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$　　したがって　$a_n=\boldsymbol{n\cdot2^{n-1}}$

3　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める．

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α，β の組を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

---

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ の左辺に $a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+2b_n$　を代入して

$2a_n+3b_n-\alpha(3a_n+2b_n)=\beta a_n-\alpha\beta b_n$

つまり　$(2-3\alpha)a_n+(3-2\alpha)b_n=\beta a_n-\alpha\beta b_n$

これがすべての自然数 n で成り立つための条件は

$2-3\alpha=\beta$，$3-2\alpha=-\alpha\beta$　　これらより　$(\alpha,\ \beta)=\boldsymbol{(-1,\ 5),\ (1,\ -1)}$

(2)　(1)より　与えられた漸化式から次の式が導かれる．

$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=3$

$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$，$a_1-b_1=1$

よって　数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 3，公比 5 の等比数列であり，

数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 1，公比 -1 の等比数列である．

したがって　$a_n+b_n=3\cdot5^{n-1}$　……①　　$a_n-b_n=(-1)^{n-1}$　……②

(①＋②)÷2 より　$a_n=\boldsymbol{\dfrac{3\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}}$

(①－②)÷2 より　$b_n=\boldsymbol{\dfrac{3\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　数列(4)

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=n+1$　のとき　$a_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(n^2+n+\boxed{\text{イ}})$　である．

(2)　$a_1=2,\ 2a_{n+1}=a_n+1$　のとき $a_n=\left(\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^{n-1}+\boxed{\text{エ}}$　である．

(3)　$a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+4}$　のとき　$a_n=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{n-1}-\boxed{\text{ク}}}$ である．

(1)　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

この式は $n=1$ のときも成立する．

よって　$a_n=\dfrac{1}{\mathbf{2}}(n^2+n+\mathbf{2})$

(2)　$2a_{n+1}=a_n+1$　より　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

つまり　$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1),\ a_1-1=1$

よって　$a_n-1=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　より　$a_n=\left(\dfrac{1}{\mathbf{2}}\right)^{n-1}+\mathbf{1}$

(3)　帰納的に $a_n>0$ である．

よって　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+4}$　の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=4\cdot\frac{1}{a_n}+2$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1}=4b_n+2,\ b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$

$$b_{n+1}+\frac{2}{3}=4\left(b_n+\frac{2}{3}\right),\ b_1+\frac{2}{3}=1$$

よって　$b_n+\dfrac{2}{3}=1\cdot 4^{n-1}$　より　$b_n=-\dfrac{2}{3}+4^{n-1}=\dfrac{3\cdot 4^{n-1}-2}{3}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}\cdot\mathbf{4}^{n-1}-\mathbf{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。